6.1.4 Číslo komplexně sdružené, dělení komplexních čísel

Předpoklady: 6103

Vzpomeneme si jeden zajímavý součin $(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=4+9+0i=13$.
Čísla v součinu jsou si podobná a výsledek je reálné číslo. Nešlo o náhodu?

Př. 1: Najdi součin analogický se součinem $(2-3i)(2+3i)$ a vypočti ho.

Spousta možností, například $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2-i^2(\sqrt{3})^2=2+3=5$.

$\Rightarrow$ To už určitě nebude náhoda. Zkusíme to obecně.

Př. 2: Najdi součin analogický s předchozími příklady pro komplexní číslo $a+bi$ a vypočti jej.

Čísla v součinu se liší znaménkem imaginární části $\Rightarrow$ $(a+bi)(a-bi)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$.

$\Rightarrow$ Protože a i b jsou reálná čísla, součin $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, je nezáporné reálné číslo.
Dvojici čísel $a+bi$ a $a-bi$ nazýváme čísla komplexně sdružená.

Číslo **komplexně sdružené** s číslem $z=a+bi$ je číslo $\overline{z}=a-bi$.

Jiný způsob zápisu: $\overline{a+bi}=a-bi$.

Pedagogická poznámka: Určitě se najde někdo, kdo bude potřebovat vysvětlení, že čárka nad číslem znamená to samé jako „číslo komplexně sdružené“. Většinou stačí jeden z následujících příkladů a problém je vyřešený.

Př. 3: Urči: a) $\overline{1+i}$ b) $\overline{2-4i}$ c) $\overline{-1+2i}$
d) $\overline{-\sqrt{2}+(2-\sqrt{3})i}$ e) $\overline{(2+i)(3-2i)}$ f) $\overline{\overline{3-2i}+1-i}$

a) $\overline{1+i}=1-i$ b) $\overline{2-4i}=2+4i$ c) $\overline{-1+2i}=-1-2i$

d) $\overline{-\sqrt{2}+(2-\sqrt{3})i}=-\sqrt{2}+(\sqrt{3}-2)i$

e) $\overline{(2+i)(3-2i)}=\overline{6-4i+3i-2i^2}=\overline{6-4i+3i+2}=\overline{8-i}=8+i$

f) $\overline{\overline{3-2i}+1-i}=\overline{3+2i+1-i}=\overline{4+i}=4-i$

Pár pravidel pro zjednodušení výpočtu komplexně sdruženého čísla:
Pro libovolná komplexní čísla z, z_1, z_2, $z_3\neq 0$ **platí:** $\overline{-z}=-\overline{z}$, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$,
$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{1}{z_3}\right)}=\frac{1}{\overline{z_3}}$, $\overline{\left(\frac{z}{z_3}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z_3}}$

Př. 4: Petáková:
strana 135/cvičení 20 e) f)
strana 135/cvičení 21 a) c)

Dělení komplexních čísel

Reálná čísla: $6:3=2$, protože $2\cdot 3=6$.

$5:6=\frac{5}{6}$ (to byl důvod pro zavedení zlomků).

Obecně: U reálných čísel platí: $x:y=x\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y}$. Jde to vždy, když platí $y\neq 0$.

Zkusíme napodobit postup v komplexních číslech: $(1+i):(2-i)=\frac{1+i}{2-i}$.

Je výraz $\frac{1+i}{2-i}$, který jsme získali, komplexní číslo? $\Rightarrow$ Zkusíme ho napsat ve tvaru $a+bi$.

Problém: Ve jmenovateli je imaginární jednotka. Co to znamená? Můžeme se jí zbavit? $\Rightarrow$ Využijeme toho, že v součinu $z\cdot\overline{z}$ imaginární část zmizí a zlomek rozšíříme:

$\frac{1+i}{2-i}=\frac{1+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i+2i+i^2}{4+1}=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ $\Rightarrow$ výsledek je komplexní číslo.

Př. 5: Ověř pomocí zpětného vynásobení, že platí $(1+i):(2-i)=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

$\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)(2-i)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i+\frac{6}{5}i-\frac{3}{5}i^2=\frac{2}{5}+\frac{5}{5}i+\frac{3}{5}=1+i$

$\Rightarrow$ Tento postup bychom mohli používat na dělení.

Půjde to vždy?

Zkusíme spočítat: $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}$.

Podmínka: $a^2+b^2\neq 0$, neplatí jen když $a=b=0$, tedy když $z=0+0i$ $\Rightarrow$ nulou nejde dělit ani v komplexních číslech, ale to zas tak nevadí.

Př. 6: **(BONUS)** Naše zavedení dělení do komplexního oboru není korektní, protože jsme zkoušeli dělit ještě dříve, než jsme dokázali, že je možné ke všem nenulovým komplexním číslům najít převrácenou hodnotu $\frac{1}{z}$. Vypočti převrácenou hodnotu komplexního čísla $a+bi$ bez toho, abys použil dělení komplexních čísel.

Máme číslo $z=a+bi$, hledáme číslo $\frac{1}{z}=x+iy$, takové aby platilo: $z\cdot\frac{1}{z}=1$.

Dosadíme: $(a+bi)(x+iy)=1$, rovnici nemůžeme dělit (obě čísla jsou komplexní), ale můžeme ji vynásobit.

$$(a+bi)(x+iy)=1 \quad /\cdot(a-bi)$$

$$(a-bi)\left[(a+bi)(x+iy)\right]=a-bi$$ násobení je asociativní $\Rightarrow$ vpravo můžeme přezávorkovat

$$\left[(a-bi)(a+bi)\right](x+iy)=a-bi$$

$$\left(a^2+b^2\right)(x+iy)=a-bi \quad /:\left(a^2+b^2\right)$$ číslo a^2+b^2 je reálné, tím dělit můžeme

$$x+iy=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$x+iy=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}$$ $\Rightarrow$ ke každému nenulovému číslu z existuje číslo $\frac{1}{z}$ takové, že platí: $z\cdot\frac{1}{z}=1$.

Př. 7: Vyjádři v algebraickém tvaru: a) $\frac{3+2i}{2-i}$ b) $\frac{2-i}{i}$ c) $\frac{2-i}{2+i}$

d) $\frac{(2+i)(1+2i)}{1+3i}$ e) $\frac{10}{(1+i)(1-2i)}$

a) $\frac{3+2i}{2-i}=\frac{3+2i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{6+3i+4i+2i^2}{4+1}=\frac{4+7i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

b) $\frac{2-i}{i}=\frac{2-i}{i}\cdot\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-2i+i^2}{-i^2}=\frac{-1-2i}{1}=-1-2i$

c) $\frac{2-i}{2+i}=\frac{2-i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}=\frac{4-4i+i^2}{4+1}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

d) $\frac{(2+i)(1+2i)}{1+3i}=\frac{2+4i+i+2i^2}{1+3i}=\frac{5i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{5i-15i^2}{1+9}=\frac{15+5i}{10}=\frac{3+i}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

e) $\frac{10}{(1+i)(1-2i)}=\frac{10}{1-2i+i-2i^2}=\frac{10}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{30+10i}{9+1}=3+i$

Př. 8: Petáková:
strana 134/cvičení 2 b) e)
strana 134/cvičení 3 b) d) e)

Umíme dělit $\Rightarrow$ můžeme zavést i zápornou mocninu (stejně jako u reálných čísel).

Pro všechna komplexní čísla $z\neq 0$ a pro všechna záporná celá čísla n definujeme
$$z^n=\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}.$$
Pro libovolné komplexní číslo $z\neq 0$ definujeme $z^0=1$.

Př. 9: Vypočti: a) $(1-i)^{-2}$ b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-1}$

a) $(1-i)^{-2}=\frac{1}{(1-i)^2}=\frac{1}{1-2i+i^2}=\frac{1}{-2i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i}{-2i^2}=\frac{i}{2}$

Jiný postup: $(1-i)^{-2}=\left(\frac{1}{1-i}\right)^2=\left(\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{1+i}{1-i^2}\right)^2=\left(\frac{1+i}{2}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{4}=\frac{2i}{4}=\frac{i}{2}$.

b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-1}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

Jiný postup: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-1}=\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^{-1}=\left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right)^{-1}=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{-1}=(-i)^{-1}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$.

Př. 10: Uveď v algebraickém tvaru číslo $\dfrac{\frac{1+2i}{1-i}+i}{1-\frac{2-i}{3+i}}$.

$$\frac{\frac{1+2i}{1-i}+i}{1-\frac{2-i}{3+i}}=\frac{\frac{1+2i+i(1-i)}{1-i}}{\frac{3+i-(2-i)}{3+i}}=\frac{\frac{1+2i+i-i^2}{1-i}}{\frac{3+i-2+i}{3+i}}=\frac{\frac{2+3i}{1-i}}{\frac{1+2i}{3+i}}=\frac{(2+3i)(3+i)}{(1-i)(1+2i)}=\frac{6+2i+9i+3i^2}{1+2i-i-2i^2}=$$

$$\frac{3+11i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{9-3i+33i-11^2}{9+1}=\frac{20+30i}{10}=2+3i$$

Př. 11: Petáková:
strana 135/cvičení 11 d)
strana 135/cvičení 13 c)

Shrnutí: Dělení komplexních čísel můžeme provést zapsáním zlomku, který poté upravíme do algebraického tvaru.